高等数学（上）期末模拟试卷

高等教育出版社正式出版

高校数学期末复习宝典
不挂科 高数叔

高等数学（上）
期末模拟试卷
高等数学（上）期末模拟试卷 A-2

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 函数 \( f(x) = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \) 在 \( x = 0 \) 处（ ）．
   
   A. 连续且可导     B. 连续但不可导     C. 可导但不连续     D. 不连续

2. \( d(\arctan \frac{1}{x}) = ( ）．\)
   
   A. \(-\frac{1}{1+x^2} \) dx     B. \(-\frac{1}{1+x^2} \) dx     C. \(-\frac{1}{1+x^2} \) dx     D. \(-\frac{x^2}{1+x^2} \) dx

3. 设函数 \( f(x) = x^3 + ax^2 + bx \) 在 \( x = 1 \) 处取得极大值 2，则必有（ ）．
   
   A. \( a = -4, b = 5 \)     B. \( a = 4, b = -5 \)     C. \( a = 1, b = -3 \)     D. \( a = -1, b = 3 \)

4. 设函数 \( f(x) = \lim_{t \to \infty} \arctan e^{tx} \)，则 \( x = 0 \) 是 \( f(x) \) 的（ ）．（山西某重点高校）
   
   A. 连续点     B. 跳跃间断点     C. 可去间断点     D. 无穷间断点

5. 下列反常积分收敛的是（ ）．
   
   A. \( \int_{1}^{\infty} \ln \frac{1}{x} \) dx     B. \( \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} \) dx     C. \( \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} \) dx     D. \( \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} \) dx

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 \( f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a + \sin^2 x, & x = 0 \end{cases} \) 在 \( x = 0 \) 处连续，则 \( a = \) ________．

2. 极限 \( \lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)}{(2x+3)^3(3x+2)^2} = \) ________．

3. 若 \( f(x) = \sin \frac{x}{2} + e^{2x} \)，则 \( f^{(27)}(0) = \) ________．

4. 当 \( x \to 0 \) 时，两个函数 \( f(x) = \int_{0}^{\sin x} \sin(t^2)dt \) 与 \( g(x) = x^4(e^x-1) \) 是同阶无穷小，则常数 \( k = \) ________．

5. 定积分 \( \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} (1 + x^3) \) cos \( \frac{x}{2} \) dx = ________．
高等数学（上）期末模拟试卷

三、求下列极限：（每题 6 分，共 12 分）

（1）\[ \lim_{x \to 0} \frac{\int_{0}^{x} (a^t - b^t) \, dt}{\int_{0}^{2x} \ln(1 + t) \, dt} \]

（2）\[ \lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) \]（山西某重点高校）

四、求导数（每题 8 分，共 16 分）

（1）设函数 \( y = y(x) \) 由 \( \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \\ y = \arctan t \end{cases} \) 确定，求 \( \frac{d^2 y}{dx^2} \).

（2）设函数 \( y = y(x) \) 由方程 \( x^3 + x^2 y = 1 + y^3 \) 确定，求 \( \frac{d^2 y}{dx^2} \bigg|_{x=0} \).
高等数学（上）期末模拟试卷

五、计算下列不定积分（每题 6 分，共 12 分）

（1）$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} \, dx$；

（2）$\int e^{2x} (\tan x + 1)^2 \, dx$.(湖南某重点高校)

六、计算定积分（每题 7 分，共 14 分）

（1）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^{-x}} \, dx$；(江苏某重点高校)

（2）设函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1-x^2}, & x \leq 0, \\ \frac{1}{1+x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1) \, dx$. 

(微信二维码)
七、（本题 7 分）设函数 \( f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b, & x \leq 0, \\ \arctan(ax), & x > 0 \end{cases} \) 在 \( x = 0 \) 处连续且可导，

（1）求 \( a, b \) 的值.
（2）求 \( f'(x) \)，并判断 \( f'(x) \) 的连续性.

八、（本题 7 分）判断函数 \( f(x) = \frac{x}{1+x} \) 的单调性，并证明不等式：

\[
\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.
\]

（湖北某 985 高校）

九、（本题 8 分）求函数 \( f(x) = |xe^{-x}| \) 的极值与拐点。（安徽某重点高校）
十、(本题 6 分) 设函数 \( f(x) \) 在 \( x = x_0 \) 处连续, \( g(x) \) 在 \( x = x_0 \) 处可导, 且 \( g(x_0) = 0 \), 证明: \( \varphi(x) = f(x)g(x) \) 在 \( x = x_0 \) 处可导.

十一、(本题 6 分) 由曲线 \( y = x^2 \) 及直线 \( x = 2, y = 0 \) 所围成的图形分别绕 \( x \) 轴及 \( y \) 轴旋转一周, 计算两个旋转体的体积.