

高等教育出版社正式出版

HEP
MNFG 高校数学期末复习宝典

不挂科 高数叔 

高等数学（上） 期末模拟试卷（B3）



购买期末复习宝典



关注领取数学期末复习宝典

高等数学（上）期末模拟试卷（B3）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在内 $(-\infty, +\infty)$ 单调有界，若数列 $\{x_n\}$ ()，则数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(陕西某 985 高校)

- A. 收敛 B. 单调 C. 有界 D. 每一项大于零

2. 设曲线 $f(x) = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ，则该曲线 () .

- A. 没有渐近线 B. 仅有水平渐近线
C. 仅有铅直渐近线 D. 既有水平渐近线又有铅直渐近线

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续且 $f(0)=0$ ，已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$ ，则

$f(x)$ 在 $x=0$ 处 () . (陕西某 985 高校)

- A. 不可导 B. 可导且导数不为 0 C. 取得极大值 D. 取得极小值

4. 曲线 $y = \ln(1-x^2)$ 在 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 上的一段弧长为 () .

A. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{(1-x^2)^2}} dx$

B. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{(1-x^2)} dx$

购买期末复习宝典

C. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{-2x}{(1-x^2)}} dx$

D. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + [\ln(1-x^2)]^2} dx$

5. 若函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f(x) \neq 0$ ，满足 $f'(x) = \frac{1}{[f(x)]^2} + [f(x)]^2$ ，则

$f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 是 () . (四川某重点高校)

A. $2[f(x)]^3 - \frac{2}{[f(x)]^5}$

B. $2f(x) - \frac{2}{[f(x)]^3}$

C. $2[f(x)]^3 + \frac{2}{[f(x)]^5}$

D. $2f(x) + \frac{2}{[f(x)]^2}$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x) = x^2 \sin x$ ，则 $f^{(10)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$. (四川某重点高校)



2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x} + \frac{\sin x}{|x|} \right] =$ _____ . (陕西某 985 高校)

3. 已知函数 $F(x)$ 是 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的一个原函数, 则 $dF(\sin x) =$ _____ . (陕西某重点高校)

4. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____ . (山东某 985 高校)

5. 设曲线 $f(x) = k(x^2 - 3)^2$, 若该曲线的拐点处的法线通过原点, 则常数 $k =$ _____ .

三、求下列极限 (每题 6 分, 共 12 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 3^{2-2\cos x}}{\arctan x^4}$;



(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 若极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(x^2 - t^2) dt}{x^a} = b$

($b \neq 0$), 求 a, b 的值. (四川某 985 高校)

四、(本题 7 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.



（湖北某 985 高校）

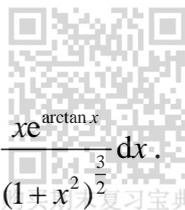
五、（本题 7 分）设由参数方程 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$ 确定了 y 是 x 的函数，求 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1}$.

（北京某重点高校）

六、（本题 6 分）计算不定积分 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$. （湖北某重点高校）

七、（本题 6 分）设 $f(2+x^4) = \ln \frac{5+2x^4}{x^4-1}$, 且 $f(g(x)) = \ln(1+x)$, 求不定积分

$\int g(x) dx$. （湖北某 985 高校）



八、（本题 6 分）计算定积分 $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$. （陕西某重点高校）

九、（本题 6 分）设 $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$, 求 $\int_0^1 xf(x)dx$. （山东某 985 高校）



十、（本题 6 分）证明不等式： $e^\pi > \pi^e$. （上海某重点高校）

十一、（本题 6 分）求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式. （北京某重点高校）



十二、（本题 6 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[2019, 2020]$ 上二阶可导， $f(2019) = 0$ ，

且 $\frac{f''(x)}{f'(x)} \neq \frac{2}{2020-x}$ ，证明方程 $f(x) = (2020-x)f'(x)$ 在内 $(2019, 2020)$ 有且只有

一个根。（四川某重点高校）



十三、（本题 8 分）在抛物线 $y = x^2 - 1 (0 < x < 1)$ 上求一点 M ，使得点 M 处的切线与两坐标轴及该抛物线所围成的图形绕 x 轴所得旋转体的体积最小，并求此最小体积。（陕西某重点高校）



十四、（本题 6 分）一酒杯的容器内壁是由曲线 $y = x^3$ ($0 \leq x \leq 3$, 单位: cm) 绕 y 轴旋转而成, 若把满杯的饮料吸入杯口上方 2cm 的嘴中, 问要做多少功? (饮料的比重为 μ , 其单位为: N/cm^3) . (江苏某重点高校)



十五、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 证明:

(1) 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) = 2 - 3x_0$.

(2) 存在 $\xi, \eta \in (0,1)$ 且 $\xi \neq \eta$, 使得 $[1 + f'(\xi)][1 + f'(\eta)] = 4$. (四川某 985 高校)

