

高等教育出版社正式出版

**HEP**  
**MNFG** 高校数学期末复习宝典

不挂科 高数叔 

# 高等数学（上） 期末模拟试卷（B3）



购买期末复习宝典



关注领取数学期末复习宝典

## 高等数学（上）期末模拟试卷（B3）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设函数  $f(x)$  在内  $(-\infty, +\infty)$  单调有界，若数列  $\{x_n\}$  ( )，则数列  $\{f(x_n)\}$  收敛.

(陕西某 985 高校)

- A. 收敛                      B. 单调                      C. 有界                      D. 每一项大于零

2. 设曲线  $f(x) = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ ，则该曲线 ( ) .

- A. 没有渐近线                      B. 仅有水平渐近线  
C. 仅有铅直渐近线                      D. 既有水平渐近线又有铅直渐近线

3. 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  的某个邻域内连续且  $f(0)=0$ ，已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$ ，则

$f(x)$  在  $x=0$  处 ( ) . (陕西某 985 高校)

- A. 不可导    B. 可导且导数不为 0    C. 取得极大值    D. 取得极小值

4. 曲线  $y = \ln(1-x^2)$  在  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  上的一段弧长为 ( ) .

A.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{(1-x^2)^2}} dx$

B.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{(1-x^2)} dx$

购买期末复习宝典

C.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{-2x}{(1-x^2)}} dx$

D.  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + [\ln(1-x^2)]^2} dx$

5. 若函数  $f(x)$  具有二阶导数，且  $f(x) \neq 0$ ，满足  $f'(x) = \frac{1}{[f(x)]^2} + [f(x)]^2$ ，则

$f(x)$  的二阶导数  $f''(x)$  是 ( ) . (四川某重点高校)

A.  $2[f(x)]^3 - \frac{2}{[f(x)]^5}$

B.  $2f(x) - \frac{2}{[f(x)]^3}$

C.  $2[f(x)]^3 + \frac{2}{[f(x)]^5}$

D.  $2f(x) + \frac{2}{[f(x)]^2}$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设函数  $f(x) = x^2 \sin x$ ，则  $f^{(10)}(x) =$  \_\_\_\_\_ . (四川某重点高校)



2. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x} + \frac{\sin x}{|x|} \right] =$  \_\_\_\_\_ . (陕西某 985 高校)

3. 已知函数  $F(x)$  是  $y = \frac{\ln x}{x}$  的一个原函数, 则  $dF(\sin x) =$  \_\_\_\_\_ . (陕西某重点高校)

4. 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$ , 则  $\int_0^1 f(x) dx =$  \_\_\_\_\_ . (山东某 985 高校)

5. 设曲线  $f(x) = k(x^2 - 3)^2$ , 若该曲线的拐点处的法线通过原点, 则常数  $k =$  \_\_\_\_\_ .

三、求下列极限 (每题 6 分, 共 12 分)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 3^{2-2\cos x}}{\arctan x^4}$  ;



(2) 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 若极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(x^2 - t^2) dt}{x^a} = b$

( $b \neq 0$ ), 求  $a, b$  的值. (四川某 985 高校)

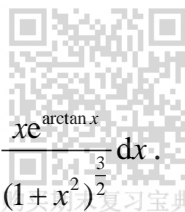
四、(本题 7 分) 设函数  $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  讨论  $f'(x)$  在点  $x=0$  处的连续性.



（湖北某 985 高校）

五、（本题 7 分）设由参数方程  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$  确定了  $y$  是  $x$  的函数，求  $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=1}$  .

（北京某重点高校）



六、（本题 6 分）计算不定积分  $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$  . （湖北某重点高校）

七、（本题 6 分）设  $f(2+x^4) = \ln \frac{5+2x^4}{x^4-1}$ ，且  $f(g(x)) = \ln(1+x)$ ，求不定积分

$\int g(x) dx$  . （湖北某 985 高校）



八、（本题 6 分）计算定积分  $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$ . （陕西某重点高校）

九、（本题 6 分）设  $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$ , 求  $\int_0^1 xf(x)dx$ . （山东某 985 高校）



十、（本题 6 分）证明不等式： $e^\pi > \pi^e$ . （上海某重点高校）

十一、（本题 6 分）求函数  $f(x) = \sqrt{x}$  按  $(x-4)$  的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式. （北京某重点高校）



十二、（本题 6 分）设函数  $f(x)$  在区间  $[2019, 2020]$  上二阶可导， $f(2019) = 0$ ，

且  $\frac{f''(x)}{f'(x)} \neq \frac{2}{2020-x}$ ，证明方程  $f(x) = (2020-x)f'(x)$  在内  $(2019, 2020)$  有且只有

一个根。（四川某重点高校）



十三、（本题 8 分）在抛物线  $y = x^2 - 1 (0 < x < 1)$  上求一点  $M$ ，使得点  $M$  处的切线与两坐标轴及该抛物线所围成的图形绕  $x$  轴所得旋转体的体积最小，并求此最小体积。（陕西某重点高校）



十四、（本题 6 分）一酒杯的容器内壁是由曲线  $y = x^3$  ( $0 \leq x \leq 3$ , 单位: cm) 绕  $y$  轴旋转而成, 若把满杯的饮料吸入杯口上方 2cm 的嘴中, 问要做多少功? (饮料的比重为  $\mu$ , 其单位为:  $\text{N}/\text{cm}^3$ ) . (江苏某重点高校)



十五、（本题 8 分）设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . 证明:

(1) 存在  $x_0 \in (0,1)$ , 使得  $f(x_0) = 2 - 3x_0$ .

(2) 存在  $\xi, \eta \in (0,1)$  且  $\xi \neq \eta$ , 使得  $[1 + f'(\xi)][1 + f'(\eta)] = 4$ . (四川某 985 高校)

