

高等教育出版社正式出版

HEP
MNFG 高校数学期末复习宝典

不挂科 高数叔 

高等数学（上） 期末模拟试卷（B4）



购买期末复习宝典



关注领取数学期末复习宝典

高等数学（上）期末模拟试卷（B4）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则其导函数在 $x = 0$ 处（ ）.
 - A. 没有意义
 - B. 连续但不可导
 - C. 不连续
 - D. 连续且可导
2. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - ax - b) = 0$, 则 $(a + b) =$ （ ）.（山西某重点高校）
 - A. 0
 - B. 1
 - C. 2
 - D. 4
3. 已知 $\lim_{x \rightarrow 2019} \frac{f(x) - f(2019)}{(x - 2019)^3} = 1$, 则 $f(x)$ 在 $x = 2019$ 处（ ）.（江苏某一般高校）
 - A. 取得极大值
 - B. 取得极限值
 - C. 不一定取得极值
 - D. 一定不取得极值
4. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 = 1$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ （ ）.（山西某重点高校）
 - A. 有渐近线, 无拐点
 - B. 无渐近线, 有拐点
 - C. 有渐近线, 有拐点
 - D. 无渐近线, 无拐点
5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$, 则（ ）.（山西某重点高校）
 - A. $f(2) < 2f(1)$
 - B. $f(2) > 2f(1)$
 - C. $2f(2) < f(1)$
 - D. $2f(2) > f(1)$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{x}}$ 的跳跃间断点是_____ .（四川某 985 高校）
2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2! + \dots + n!}{n!} =$ _____ .（湖南某 985 高校）
3. 曲线 $\rho = a \sin 2\theta (a > 0)$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为_____ .（上海某重点高校）
4. 定积分 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx =$ _____ .（山东某 985 高校）
5. 函数 $y = \ln \frac{1-x}{1+x^3}$ 的麦克劳林展开式中, x^{2021} 的系数为_____ .（陕西某



985 高校)

三、求下列极限（每题 6 分，共 12 分）

(1) 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0) = 0$ ， $f'(0) = 1$ ，计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt}{x^2(1 - e^{x^2})}$ ；

（安徽某重点高校）

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (k + \frac{1}{n})^2 \tan \frac{1}{n^3}$. （陕西某 985 高校）



购买期末复习宝典

四、(本题 8 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x < 0, \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & 0 \leq x \leq 1, \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上可导,} \\ 2 \arctan x - \frac{\pi}{2}, & x > 1 \end{cases}$

求常数 a, b, c, d . (江苏高数竞赛)



关注领取数学期末复习宝典

五、（本题 6 分）设方程 $e^{xy} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 1$ 可确定函数，求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$ 。

（四川某 985 高校）

六、计算不定积分（每题 6 分，共 12 分）

(1) $\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$; (上海某重点高校)



(2) $\int e^{-x} \left(\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} - \sqrt{\sin x} \right) dx$. (山西某重点高校)

七、计算定积分（每题 6 分，共 12 分）

(1) $\int_0^2 x^2 \sqrt{2x-x^2} dx$; (四川某 985 高校)



(2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$. (山西某重点高校)

八、(本题 6 分) 已知 $a_n = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin nx dx$ (n 为正整数), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$. (安徽某重点高校)



九、(本题 7 分) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件 $f(x) + f(-x) = A$ (A 为常数)

(1) 证明: $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx$;

(2) 利用 (1) 的结果计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$. (安徽某重点高校)



十、（本题 7 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ 。

(1) 求证： $\exists \xi \in (0,1)$ ，使得 $f(\xi) = 0$ ；

(2) 求证： $\exists \eta \in (0,1)$ ，使得 $f''(\eta) = f(\eta)$ 。（陕西某 985 高校）



十一、（本题 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0) = f(1) = f'(1) = 0$ ，
证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c ，使得 $3f''(c) + cf'''(c) = 0$ 。（湖北某 985 高校）



十二、（本题 7 分）设曲线 $y = a(1 - x^2)$ ($a > 0$) 在点 $A(1,0)$ 和 $B(-1,0)$ 处的法线与曲线所围成的封闭图形为 D .

(1) 当 D 的面积最小时，求常数的 a 值和最小面积；

(2) 当 D 的面积最小时，求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.（安徽某重点高校）



购买期末复习宝典

十三、（本题 7 分）设曲线 $y = x \sin x$ 在 $[(n-1)\pi, n\pi]$ 上与 x 轴所围成的图形的面积为 s_n .

(1) 求 s_n 的值；

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{2^2} + \cdots + \frac{s_n}{2^n})$.（山西某重点高校）



关注领取数学期末复习宝典