

高等教育出版社正式出版

HEP
MNFG 高校数学期末复习宝典

不挂科 高数叔 

高等数学（上） 期末模拟试卷（B5）

（试题选自高校期末试卷真题）



购买期末复习宝典

本模拟卷精解精讲视频请扫描



数字高教商城



关注领取数学期末复习宝典

高等数学（上）期末模拟试卷（B5）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{x} = (\quad)$.

- A. 2 B. -2 C. 0 D. 不存在

2. 设函数有二阶连续导数，且 $f(0) = f'(0) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = -1$ ，则存在当 $\delta > 0$ 有 ()。（安徽某重点高校）

校)

- A. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx > 0$ B. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx < 0$
 C. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx = 0$ D. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx > 0$ 且 $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx < 0$

3. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在二阶导数，且 $f(x) = -f(-x)$ ，当 $x < 0$ 时有 $f'(x) < 0$ ， $f''(x) > 0$ ，则当 $x > 0$ 时有 ()。

- A. $f'(x) < 0$ ， $f''(x) > 0$ B. $f'(x) < 0$ ， $f''(x) < 0$
 C. $f'(x) > 0$ ， $f''(x) > 0$ D. $f'(x) > 0$ ， $f''(x) < 0$

4. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且 $f(x) < g(x)$ ，则必有 ()。（湖北某重点高校）

- A. $f(-x) > g(-x)$ B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
 C. $f'(x) < g'(x)$ D. $\int_0^x f(t)dt < \int_0^x g(t)dt$

5. 设函数 $f(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$ ，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 ()。（山东某 985 高校）

- A. 单调增加，凸的 B. 单调增加，凹的
 C. 单调减少，凸的 D. 单调减少，凹的



二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n + k} =$ _____ . (湖北某 985 高校)

2. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $bx - \sin x$ 与 $\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt$ 是等价无穷小, 则 $(a+b)$ _____ .

3. 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{2019x} - 2019)$, 则 $f'(0) =$ _____ . (江苏某 985 高校)

4. 设 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5$, $f(\pi) = 2$, 则 $f(0) =$ _____ . (山东某 985 高校)

5. 设函数 $f(x) = \int_0^{3x} e^{-t^2} dt + 2$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 则 $g'(2) =$ _____ . (山西某重点高校)



三、(本题 6 分) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$. (北京某 985 高校)



四、（本题 6 分）设函数 $g(x)$ 二阶可导且 $g(0) = 1$, $g'(0) = 2$, $g''(0) = 1$, 并设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{2x}}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

求 $f'(0)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性. (四川某 985 高校)

五、（本题 6 分）已知曲线 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$ ($0 < x < \pi$), 求曲线的弧长. (湖北某 985 高校)

六、计算不定积分（每题 6 分，共 12 分）

(1) $\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$; (山东某 985 高校)

(2) $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx$. (山东某 985 高校)



七、（本题 6 分）讨论函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数. (湖北某重点高校)



八、计算定积分（每题 6 分，共 12 分）

(1) 设 $a > 0$, $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{3}\right) dx$; (湖北某 985 高校)

(2) 计算定积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + e^x - e^{-x}) \cos^3 x dx$. (天津某 985 高校)

九、(本题 6 分) 设 $f(x)$ 为连续函数, 且

$$f(x) = x^2 + 2 \int_0^1 f(t) dt - x \int_1^2 f(t) dt,$$

求 $f(x)$. (天津某 985 高校)



十、(本题 6 分) 求在极坐标下的曲线 $\rho = 3 \cos \theta$ 及 $\rho = 1 + \cos \theta$ 所围成图形的公共部分的面积. (北京某重点高校)

十一、(本题 6 分) 当时 $0 < x < 1$, 证明不等式 $\frac{\sqrt{x} \ln x}{x-1} < 1$. (北京某 985 高校)



十二、（本题 6 分）设函数 $f(x) = 4 \arctan x - 2x + 1$ ，讨论：

- (1) 函数 $f(x)$ 的单调性、极值点与极值；
 (2) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性、拐点、渐近线。（北京某 985 高校）

十三、（本题 6 分）已知 $|f'(x)| \leq M$ ， $x \in [0,1]$ 。证明

$$\left| \int_1^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}. \quad (\text{湖北某重点高校})$$



十四、（本题 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} \right) = 0$ ， $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ 。

证明：存在 $\xi \in (0,2)$ ，使得

$$f''(\xi) = 0. \quad (\text{安徽某重点高校})$$



十五、（本题 6 分）设 $x_1 > 0$ ，且满足 $x_{n+1} = e^{-x_n} + x_n - 1$ ，

（1）证明：数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限；

（2）求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}}$. （山西某重点高校）



购买期末复习宝典

十六、（本题 6 分）曲线 $y = e^{-x^2} (x > 0)$ 与 x 轴所围成的图形由 $x = a (a > 0)$ 分成两个部分，若分别绕 y 轴旋转所产生的旋转体体积相等，求常数 a 的值. （山西某重点高校）



关注领取数学期末复习宝典

高等数学（上）期末模拟试卷（B5）参考答案

一、 1. D. 2. B. 3. B. 4. B. 5. B.

二、 1. $\frac{1}{2}$. 2. 5. 3. 2018!. 4. 3. 5. $\frac{1}{3}$.

三、 $-\frac{1}{12}$.

四、 $-\frac{3}{2}$. 五、 4.

六、 (1) $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \arcsin \frac{x}{2} + C$;

(2) $\ln|2x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

七、 略.

八、 (1) $-\ln 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot a^2$; (2) $\frac{4}{3}$.

九、 $f(x) = x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{4}{9}$.

十、 $\frac{5}{4}\pi$.

十一、 略. 十二、 略. 十三、 略. 十四、 略.

十五、 (1) 略; (2) $e^{-\frac{1}{3}}$.

十六、 $a = \sqrt{\ln 2}$.

