高等教育出版社正式出版

HEP MNFG 高校数学期末复习宝典

不挂科 高数叔

线性代数
期末模拟试卷（A1）

（试题选自高校期末试卷真题）

线性代数期末模拟试卷（A1）

一、填空、选择题（32 分，每题 4 分）

1．已知$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是四元线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的3个解，其中$R(\boldsymbol{A})=3$且$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(4,4,4,4)^{\mathrm{T}}$，则线性方程组$\boldsymbol{A}(-3\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2+3\boldsymbol{X})$的通解为______.

2．已知3阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值分别为1,2,3，则$\left|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}\right|=$______.

3．设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和均为0，且$R(\boldsymbol{A})=n-1$，则齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解为______.

4．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$，$a_i\neq 0$，$b_i\neq 0$（$i=1,2,3$），则$R(\boldsymbol{A})=$______.

5. 已知$\boldsymbol{A}$为 3 阶方阵，$\boldsymbol{B}$为 4 阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$，则行列式$\left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}\right|,\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right|$的值为（　　）.

A. $48,-\frac{1}{16}$　B. $24,-\frac{1}{8}$　C. $24,-\frac{1}{16}$　D. $48,-\frac{1}{8}$

6. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{32}+2a_{12} & a_{33}+2a_{13} \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{B}=$______.

7. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是三阶矩阵，则下列行列式中等于 $|\boldsymbol{A}|$ 的是（　　）.

A. $|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1|$　B. $|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|$

C. $|\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2|$　D. $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2|$

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，正确的法则是（　　）.

A. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$　B. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

C. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$　D. $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

二、(10 分)计算行列式 $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

三、(10 分)若四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{AB}+6\boldsymbol{E}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

四、(8 分) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，并求其逆.

五、（10 分）设 $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-1-\lambda,\end{cases}$ 问 λ 为何值时, 此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时，求其通解.

六、(10 分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 0,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,3,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,5,-1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,3,-1)^{\mathrm{T}}$，

(1) 求该向量组的秩；
(2) 求该向量组的一个最大无关组；
(3) 把其余向量用最大无关组表示出来.

七、（10 分）求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型

$$f(x)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准形.

八、(10 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，且满足 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\2a\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{A}^2$ 不是正定矩阵，求：

(1) 常数 a 的值；

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

线性代数期末模拟试卷（A1）参考答案

一、1. $\boldsymbol{X}=C(3,2,1,0)^{\mathrm{T}}-(1,2,3,4)$，$C\in\mathbf{R}$.　2. -14.　3. $C\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},C\in\mathbf{R}$.

4. 1.　5. A.　6. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$　7. C.　8. D.

二、$(-1)^n(n+1)\prod_{i=1}^{n}a_i$.　三、$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$.

四、$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$.

五、当 $\lambda\neq 1$，且 $\lambda\neq 10$ 时，方程组有唯一解;当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解，方程组的通解为

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$（$k_1,k_2\in\mathbf{R}$），当 $\lambda=10$ 时，方程组无解.

六、(1) 向量组的秩是 3；(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是其一个最大线性无关组（答案不唯一）；

(3) $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

七、正交变换为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2\sqrt{5}}{15}&-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&-\frac{2}{3}\\ 0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，标准形为

$$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

八、（1）$a=-2$.（2）$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{21}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{3}{\sqrt{14}}&-\frac{2}{\sqrt{21}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{14}}&-\frac{4}{\sqrt{21}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}$.