高等教育出版社正式出版

HEP MNFG 高校数学期末复习宝典

不挂科 高数叔

线性代数
期末模拟试卷（B1）

（试题选自高校期末试卷真题）

性代数期末模拟试卷（B1）

一、 填空题 （30 分，每题 3 分）

1．设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是 3 维列向量，$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)$，$\boldsymbol{B}=\left(2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\right)$，若$\left|\boldsymbol{A}\right|=6$，则

$\left|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\right|=$______.

2． $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$的特征值______（相等，不相等），$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$_______（相似，不相似）.

3．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_1$______（能或不能）由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示.

4．若 3 阶对称阵$\boldsymbol{A}$有特征值$1,1,2$，则$R\left(\boldsymbol{A}\right)=$______，行列式$\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}+2\boldsymbol{A}^*\right|=$______.

5．设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{A}$为$2\times3$矩阵，

$R\left(\boldsymbol{A}\right)=2$，则线性方程组$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$的通解________________.

6．已知 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=3$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有______个线性无关的解向量.

7．已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$ 正定，则常数 a 的取值范围是______.

8．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$ 为正交矩阵，则 $(a,b)=$______.

9．已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均是 4 维列向量，又 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma})$，若 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|=$______.

二、(10 分)设α、β、γ是方程$x^3+px+q=0$的根，求3阶行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

三、(6 分)设 3 阶方阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$满足方程$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，试求矩阵$\boldsymbol{B}$以及行列式$\left|\boldsymbol{B}\right|$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

四、(12 分)已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(1+a,1,1,1\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(2,2+a,2,2\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\left(3,3,3+a,3\right)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\alpha}_4=\left(4,4,4,4+a\right)^{\mathrm{T}}$，问

(1) a为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关；

(2) 在向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关时求出此时它的一个最大无关组，并将其余向量用最大线性无关组线性表示.

五、(12 分)设线性方程组为

$$\begin{cases} x_1-3x_2-\ x_3=0, \\ x_1-4x_2+a\,x_3=b, \\ 2x_1-x_2+3x_3=5, \end{cases}$$

问a，b取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？ 有无穷多解时，求出其通解.

六、（12 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1$，用正交变换把二次型化为标准形，并写出所用的正交变换矩阵.

七、（12 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应特征值 $\lambda=1$ 的特征向量，求矩阵 $\boldsymbol{A}^n$.

八、（8 分）二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 对应的规范形为 $f=2y_1^2+3y_2^2-4y_3^2$，通过的正交变换为 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$，求通过正交变换 $\boldsymbol{Q}=(-\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_1,-\boldsymbol{P}_2)$ 得到的规范形.

性代数期末模拟试卷（B1）参考答案

一、1．12.　　2.相等；不相似.　　3.不能.　　4.108.　　5.$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}\ (k\in\mathbf{C})$.

6.3.　　7.$|a|<\sqrt{\frac{7}{2}}$.　　8.$\left(\frac{1}{3},0\right)$.　　9. 189.

二、0.　　三、$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&-1/2\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{B}|=1/2$.

四、（1）当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关;

（2）当 $a=0$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的最大线性无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$；当 $a=-10$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的最大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.(注明：最大线性无关组还有其他答案.)

五、当 $a\neq-2$ 时，方程组有唯一解;　当 $a=-2$，$b\neq-1$ 时，方程组无解; 当 $a=-2$，$b=-1$ 时，方程组有无穷多组解, 其通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}，\ k\text{ 为任意常数.}$$

六、正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，

标准形为 $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.(注明：正交变换矩阵还有其他答案.)

七、$\boldsymbol{A}^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-2)^n&0&1-(-2)^n\\0&2&0\\1-(-2)^n&0&1+(-2)^n\end{pmatrix}$.

八、$f=-4y_1^2+2y_2^2+3y_3^2$