高等教育出版社正式出版

高校数学期末复习宝典

不挂科 高数叔

线性代数
期末模拟试卷（B3）

（试题选自高校期末试卷真题）

性代数期末模拟试卷（B3）

一、填空题 （30 分，每题 3 分）

1．已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,a,a^2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,b,b^2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,c,c^2)^{\mathrm{T}}$，$a,b,c$互不相等，则行列式$|(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)|=$_______，向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(1,a,a^2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,b,b^2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,c,c^2,1)^{\mathrm{T}}$必线性_______.（填“相关”或“无关”）

2．设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$(k\boldsymbol{A})^*=$_______.

3．设行列式$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则$D$的第4行元素的余子式之和的值为_______.

4．设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为3阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$_______.

5．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 a_i 各不相等，且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，则解 $\boldsymbol{x}=$_______.

6．设 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_r$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量，若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为_______.

7．二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 是_______定的．（填“正”或“负”）

8．在 $\mathbf{R}^3$ 中，$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 下的坐标为_______；若 $\mathbf{R}^3$ 的另外一组基为 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为_______.

二、（10 分）设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & x\\ 1 & 4 & 9 & x^2\\ 1 & 8 & 27 & x^3\end{vmatrix}$，求导函数 $f'(x)$ 的零点个数.

三、（6 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆，求 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$.

四、（12 分）确定 a，使 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-2\\a\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}-2\\a\\a\end{pmatrix}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

五、（12 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 阶列向量，b 为常数，记分块矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，

（1）计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$；

（2）证明 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

六、（12 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$，当 a 为何值时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷解，在有无穷解时，求解方程.

七、（12 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似，

（1）求 x， y；

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

八、（8 分）已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$\begin{aligned}l_1: ax+2by+3c=0,\\ l_2: bx+2cy+3a=0,\\ l_3: cx+2ay+3b=0,\end{aligned}$$

试证这三条直线交于一点的必要条件为 $a+b+c=0$.